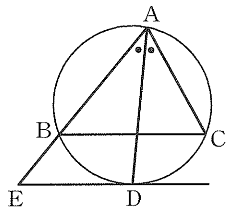
第５講座　図形の性質(2)

パターンの習得

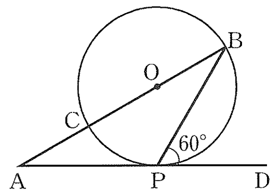
例題 1　円の接線

1　右の図において，△ABCは円に内接し，∠Aの二等分線と円との交点をDとする。また，Dにおける円の接線とABの延長との交点をEとする。このとき，BC∥EDであることを証明せよ。

解法のポイント　△BADにおいて，接弦定理を利用する。



2　類題　右の図において，ADは点Pにおける円Oの接線であり，直線AOが円Oと交わる点をB，Cとする。円Oの半径を２，∠BPD＝60°とするとき，△APBの面積を求めよ。



例題 2　方べきの定理

3　２点A，Bで交わる２つの円O，O′があり，直線AB上にA，Bと異なる点Pをとる。点Pを通り円Oと点C，Dで交わる直線をひく。また，点Pを通り円O′と２点E，Fで交わる直線をひく。このとき，４点C，D，E，Fは同一円周上にあることを証明せよ。

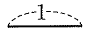
解法のポイント　円O，O′について，それぞれ方べきの定理を用いる。

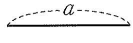
4　類題　ABを直径とする半円周上に２点C，Dをとり，２直線AC，BDの交点をPとする。このとき，AP·AC＋BP·BD＝AB^2 が成り立つことを証明せよ。

例題 3　作図(線分の作図，相似を利用した作図)

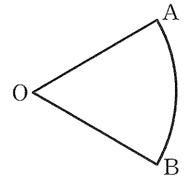
5　次の問いに答えよ。

(1)　長さ１の線分と長さaの線分が与えられたとき，長さa^2の線分を作図せよ。





(2)　右の図のようなおうぎ形OABの$\overset{\frown}{AB}$上に頂点R，Sをもち，おうぎ形OABに内接する正方形PQRSを作図せよ。

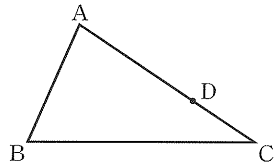


解法のポイント　(2)　OA，OB上に２頂点P′，Q′をもつ適当な正方形P′Q′R′S′を作図し，OS′，OR′と$\overset{\frown}{AB}$との交点をS，Rとする。

6 **類題** 次の問いに答えよ。

(1) 長さ２の線分と長さ５の線分が与えられたとき，長さ$\sqrt{10}$の線分を作図せよ。

(2) △ABCと辺AC上の点Dが与えられたとき，Dを通り，△ABCの面積を２等分する直線を作図せよ。

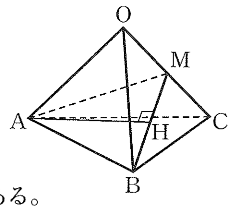


例題 4　直線と平面

7 正四面体OABCにおいて，辺OCの中点をMとし，頂点AからBMに下ろした垂線をAHとするとき，次の問いに答えよ。

(1) AHは平面OBCに垂直であることを証明せよ。

(2) OC⊥AB であることを証明せよ。

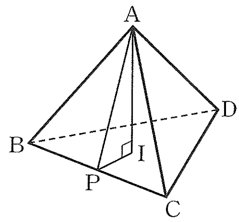


解法のポイント (1) 三垂線の定理を利用する。 (2) OC⊥平面ABM である。

8 **類題** 四面体ABCDにおいて，△BCDの内心をI，△BCDの内接円と辺BCとの接点をPとする。AP⊥BC，AI⊥IP であるとき，次の問いに答えよ。

(1) AIは平面BCDに垂直であることを証明せよ。

(2) ∠IBD＝35° のとき，平面ABIと平面APIのなす角θを求めよ。

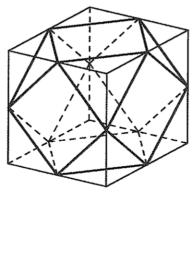


例題 5　多面体

9 １辺の長さが$2a$の正六面体の各辺の中点を通る平面で８個の頂点を切り取ってできる多面体について，次の問いに答えよ。

(1) この多面体について，オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめよ。

(2) この多面体の体積を求めよ。



解法のポイント 凸多面体の頂点，辺，面の数をそれぞれv，e，fとすると，
$v-e+f=2$（オイラーの多面体定理）

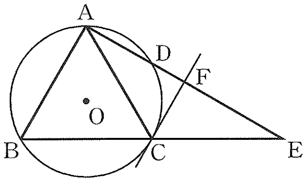
10 **類題** **9**の多面体の各辺の中点を通る平面で頂点を切り取ってできる多面体について，次の問いに答えよ。

(1) この多面体は何面体か。

(2) この多面体の体積を求めよ。

演　習

11　右の図で，円Oに内接する△ABCの辺BCの延長上にCA＝CEとなるように点Eをとり，AEと円Oの交点をDとする。いま，Cにおける円Oの接線を引き，AEとの交点をFとすれば，△ABE∽△FDCであることを証明せよ。



12　相交わる２円の共通弦上の１点Cを通る割線を引き，１つの円との交点をA，D，他の円との交点をB，Eとする。A，B，C，D，Eがこの順にあるとき，AB･CD＝BC･DEであることを証明せよ。

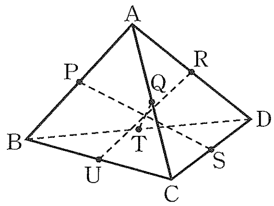
13　長さ１，aの線分が与えられているとき，次の問いに答えよ。

(1)　長さ$\sqrt{a}$の線分を作図せよ。

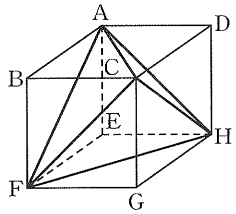
(2)　長さ$\sqrt{a+1}$の線分を作図せよ。

(3)　(1)，(2)を利用して，２次方程式$x^2-2\sqrt{a}x-1=0$の正の解の長さをもつ線分を作図せよ。

14　四面体ABCDの各辺の中点をそれぞれP，Q，R，S，T，Uとする。このとき，線分PS，QT，RUは１点で交わることを証明せよ。



15　正六面体ABCD–EFGHを４つの平面ACF，ACH，AFH，CFHで切る。新しくできた立体ACFHが正四面体であることを証明せよ。



16　１辺がaの正八面体について，次の条件を満たす球の半径を求めよ。

(1)　６つの頂点をすべて通る。　　　(2)　８つの面すべてに接する。

17　発展　２点A，Bで交わる２つの円O_1，O_2がある。線分ABの延長上の点Cから，O_1に点Dで接する直線と，O_2に点E，Fで交わる直線を引く。このとき，CE･DF＝ED･CDであることを証明せよ。

ヒント　$CA \cdot CB = CD^2$，$CA \cdot CB = CE \cdot CF$を利用する。

解答　《sP数学Aのまとめ》

第１講座　場合の数

【p.2】

1 (1)　3，6で割り切れる数の個数をそれぞれ$n(A)$，$n(B)$とすると，$n(A)=33$，$n(B)=16$
また，$n(A\cap B)=16$　よって，
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=\mathbf{33}$

(2)　5で割り切れる数の個数を$n(C)$とおくと，
$n(C)=20$，$n(A\cap C)=6$より，
$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$
$=33+20-6=47$
$n(\overline{A}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup C})=100-47=\mathbf{53}$

(3)　4で割り切れる数の個数を$n(D)$とおくと，
$n(D)=25$，$n(A\cap D)=8$，$n(D\cap C)=5$，
$n(C\cap A)=6$，$n(A\cap D\cap C)=1$より，
$n(A\cup D\cup C)=n(A)+n(D)+n(C)$
$-n(A\cap D)-n(D\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap D\cap C)$
$=33+25+20-8-5-6+1=\mathbf{60}$

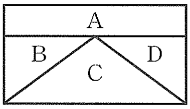
2 (1)　43　　(2)　29　　(3)　57　　(4)　15

3 (1)　7通り　　(2)　$72=2^3\times3^2$より，**12個**

4 (1)　20通り

(2)　りんごをx個とすると，$x=0$のとき5通り，$x=1$のとき4通り，$x=2$のとき3通り，$x=3$のとき2通り。よって，$5+4+3+2=\mathbf{14}$**(通り)**

(3)　AとCが異なる色のとき



$4\times3\times2\times2=48$(通り)
AとCが同じ色のとき
$4\times3\times1\times3=36$(通り)
よって，$48+36=\mathbf{84}$**(通り)**

【p.3】

5 (1)　${}_5P_4=\mathbf{120}$**(通り)**

(2)　$(5-1)!=\mathbf{24}$**(通り)**　　(3)　$3^4=\mathbf{81}$**(通り)**

6 (1)　$5!\times3!=\mathbf{720}$**(通り)**

(2)　$4!\times4!\times2=\mathbf{1152}$**(通り)**

(3)　$(5-1)!\times2=\mathbf{48}$**(通り)**　　(4)　$2^5=\mathbf{32}$**(個)**

7 (1)　$a\ d$○○○という文字列の3番目だから，
$\boldsymbol{a\ d\ c\ b\ e}$

(2)　$4!+4!+3!+2!+2!+1=\mathbf{59}$**(番目)**

8 (1)　${}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4=\mathbf{1260}$**(通り)**

(2)　$\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3}{3!}=\mathbf{280}$**(通り)**

(3)　$\dfrac{9!}{2!3!4!}=\mathbf{1260}$**(通り)**

9 (1)　${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3=\mathbf{1680}$**(通り)**

(2)　${}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4\times3!=\mathbf{7560}$**(通り)**

(3)　$\dfrac{5!}{1!2!2!}=\mathbf{30}$**(個)**

10 (1)　${}_5C_2\times{}_6C_2=\mathbf{150}$**(個)**

(2)　3個の数字のとり方は(1，2，3)，(1，2，2)，(1，3，3)，(2，2，3)，(2，3，3)より，
$3!+3\times4=\mathbf{18}$**(個)**

(3)　${}_{10}C_2-10=\mathbf{35}$**(本)**

【p.4】

11 $\boldsymbol{n(\overline{A}\cup\overline{B})}=n(\overline{A\cap B})=50-20=\mathbf{30}$
$\boldsymbol{n(\overline{A}\cap\overline{B})}=n(\overline{A\cup B})=50-40=\mathbf{10}$
$\boldsymbol{n(B)}=n(A\cup B)-n(A)+n(A\cap B)$
$=40-28+20=\mathbf{32}$

12 (1)　2題とも解けなかった人が0人のとき，2題とも解けた人が最も少なくなる。
よって，求める人数をx人とすると，
$x=63+52-100=\mathbf{15}$

(2)　「2題とも解けた人の人数」=「Bが解けた人の人数」となるとき，2題とも解けなかった人が最も多くなる。よって，求める人数をy人とすると，
$y=100-63=\mathbf{37}$

13 条件より，$bx^2-ax+1=0$の判別式をDとすると，$D=a^2-4b>0$，$b\neq0$ ……①
①を満たす$(a,\ b)$の組は，
(3，1〜2)，(4，1〜3)，(5，1〜6)，(6，1〜8)，(7，1〜9)，(8，1〜9)，(9，1〜9)である。
よって，$2+3+6+8+9+9+9=\mathbf{46}$**(個)**

14 (1)　万の位が1のとき，${}_4P_4=24$，万の位が2のとき，千の位が0，1のときはどれも${}_3P_3=6$
よって，$24+2\times6=36$　よって，万の位が2，千の位が3の数のうち，小さい方から40番目は
23140

(2)　8個の玉から5個を選ぶ順列は${}_8P_5$通り。これを円形に並べ，更に裏返すことができる場合であるから，腕輪のつくり方は全部で，
$\dfrac{{}_8P_5}{5}\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{672}$**(通り)**

15 (1)　$\dfrac{10!}{2!2!3!1!1!1!}=\mathbf{151200}$**(通り)**

(2)　tとnは順番が決まるので，並べる場所だけ考えると，${}_{10}C_2$通り。残りの8文字は同じものを含む順列で並べると，全部で